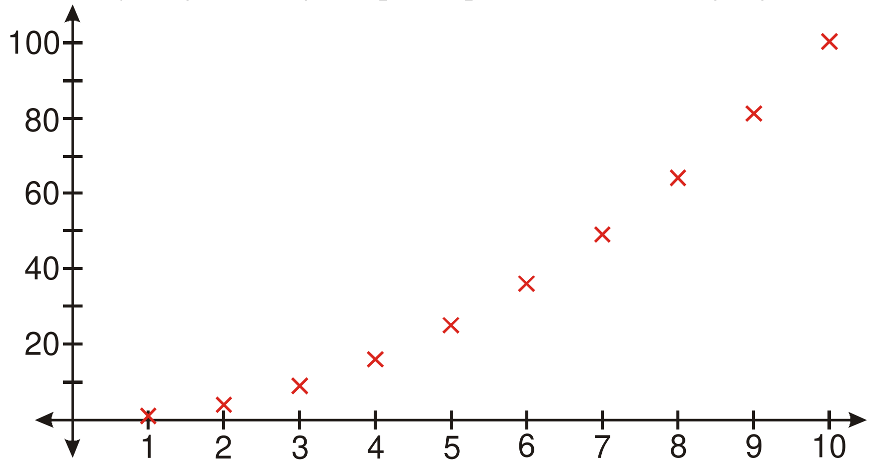
8.4.5 Nevlastní limita posloupnosti

Předpoklady: 080402

Př. 1: Je dána posloupnost $\left(n^2\right)_{n=1}^{\infty}$. Urči prvních deset členů, nakresli graf posloupnosti a rozhodni, zda má limitu.

Prvních deset členů posloupnosti: $1,4,9,16,25,36,49,64,81,100$ $\Rightarrow$ hodnoty se neustále (a čím dál rychleji) zvětšují $\Rightarrow$ posloupnost nemá limitu (jak je vidět i z grafu).

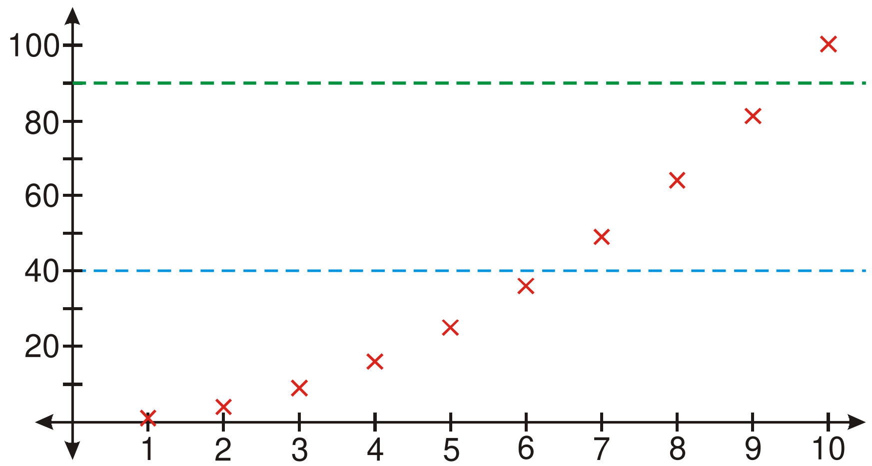


Posloupnost $\left(n^2\right)_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu, přesto nemůžeme říct, že by její hodnoty nikam nesměřovaly. Hodnoty se neustále (a stále rychleji) zvětšují $\Rightarrow$ posloupnost se pro n blížící se k nekonečnu blíží také k nekonečnu.

Říkáme, že posloupnost $\left(n^2\right)_{n=1}^{\infty}$ má **nevlastní limitu** $+\infty$. Přídavné jméno nevlastní používáme k odlišení od konvergentních posloupností, které mají limitu (které se říká vlastní limita).

Stejně jako u vlastní limity i u nevlastní limity musíme najít matematicky přesné vyjádření nematematického slovního spojení "posloupnost se pro n blížící se k nekonečnu blíží také k nekonečnu".

Čím se liší posloupnost s nevlastní limitou $+\infty$ od ostatních posloupností?
Hodnoty rostou nade všechny meze $\Rightarrow$ pokud si zvolíme libovolně velké číslo, hodnoty posloupnosti určitě tuto hodnotu překročí a už nad ní zůstanou.



Na obrázku je vidět, jak posloupnost překoná hodnoty 40 (od členu a_7) i 90 (od členu a_{10}).

Informace z grafu můžeme ověřit i početně.

Kdy překročí členy posloupnosti hodnotu 40?
$a_n = n^2 > 40$ (obě strany jsou kladné $\Rightarrow$ můžeme odmocnit a nerovnost se zachová)
$n > \sqrt{40} \doteq 6,3$ $\Rightarrow$ od členu a_7 jsou už všechny členy posloupnosti větší než 40.

Kdy překročí členy posloupnosti hodnotu 90?
$a_n = n^2 > 90$ (obě strany jsou kladné $\Rightarrow$ můžeme odmocnit a nerovnost se zachová)
$n > \sqrt{90} \doteq 9,5$ $\Rightarrow$ od členu a_{10} jsou už všechny členy posloupnosti větší než 90.

Můžeme to zkusit i obecně.
$a_n = n^2 > K$ (volíme $K > 0$, obě strany jsou kladné $\Rightarrow$ můžeme odmocnit a nerovnost se zachová)
$n > \sqrt{K}$ $\Rightarrow$ od členu a_n jsou už všechny členy posloupnosti větší než *K*.

Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu plus nekonečno, právě když pro každé reálné číslo *K* existuje $n_0 \in N$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $a_n > K$. Píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Př. 2: Rozhodni, zda má posloupnost $\left(2^n\right)_{n=1}^{\infty}$ nevlastní limitu plus nekonečno. Pokud ano, dokaž pravdivost tvrzení.

Několik prvních členů posloupnosti $\left(2^n\right)_{n=1}^{\infty}$: $2,4,8,16,32,64,128,...$ $\Rightarrow$ zdá se, že posloupnost je rostoucí a blíží se k plus nekonečnu $\Rightarrow$ posloupnost $\left(2^n\right)_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu plus nekonečno.
Důkaz: Zvolíme libovolné reálné $K > 0$ (pro $K \leq 0$ podmínka pro existenci nevlastní limity platí automaticky, protože všechny členy posloupnosti jsou kladné.
Chceme najít člen posloupnosti, pro který platí $a_n > K$.

$2^n > K$ (logaritmujeme při základu 10 $\Rightarrow$ nemění se znaménko nerovnosti)
$\log 2^n > \log K$
$n \cdot \log 2 > \log K$
$n > \dfrac{\log K}{\log 2}$ $\Rightarrow$ pro každé reálné číslo *K* najdeme takové *n*, že všechny členy posloupnosti za ním jsou větší než K $\Rightarrow$ posloupnost $\left(2^n\right)_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu plus nekonečno.

Př. 3: Mohou se hodnoty posloupnosti blížit také k mínus nekonečnu? Jakou vlastnost by takové posloupnosti musely mít? Vyslov definici nevlastní limity $-\infty$.

Stačí hodnoty posloupnosti $\left(n^2\right)_{n=1}^{\infty}$ vynásobit číslem (-1) a budou se blížit k mínus nekonečnu.
Hodnoty klesají pode všechny meze $\Rightarrow$ pokud si zvolíme libovolně malé číslo, hodnoty posloupnosti určitě tuto hodnotu překročí a už pod ní zůstanou.
Definice: Říkáme, že posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu mínus nekonečno, právě když pro každé reálné číslo *L* existuje $n_0 \in N$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $a_n < L$. Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Př. 4: Může být posloupnost, která má nevlastní limitu, omezená? Proč?

Posloupnost má nevlastní limitu $\Rightarrow$ její hodnoty jsou od určitého členu větší (nebo menší) než libovolné reálné číslo $\Rightarrow$ posloupnost nemůže být omezená

Př. 5: Rozhodni o platnosti následujících vět.
a) Každá neomezená posloupnost má nevlastní limitu.
b) Každá neomezená monotónní posloupnost má nevlastní limitu $+\infty$ nebo $-\infty$.
c) Každá posloupnost, která má nevlastní limitu $+\infty$ nebo $-\infty$ je monotónní.

a) Každá neomezená posloupnost má nevlastní limitu.
Věta neplatí. Posloupnost $\left(\left[-2\right]^n\right)_{n=1}^{\infty}$ je neomezená, ale nemá nevlastní limitu (neustále se střídají kladné a záporné hodnoty s rostoucí absolutní hodnotou).

b) Každá neomezená monotónní posloupnost má nevlastní limitu $+\infty$ nebo $-\infty$.
Věta platí. Jsou dvě možnosti.

- Posloupnost je neomezená a rostoucí $\Rightarrow$ každý člen posloupnosti je větší než člen předchozí a zároveň neexistuje číslo, které by bylo větší než všechny hodnoty posloupnosti $\Rightarrow$ pro každé číslo najdeme takový člen posloupnosti, který je větší a protože všechny následující členy jsou větší než nalezený člen, jsou větší i než zvolené číslo $\Rightarrow$ splněna definice nevlastní limity plus nekonečno.
- Posloupnost je neomezená a klesající $\Rightarrow$ každý člen posloupnosti je menší než člen předchozí a zároveň neexistuje číslo, které by bylo menší než všechny hodnoty posloupnosti $\Rightarrow$ pro každé číslo najdeme takový člen posloupnosti, který je menší a protože všechny následující členy jsou menší než nalezený člen, jsou menší i než zvolené číslo $\Rightarrow$ splněna definice nevlastní limity minus nekonečno.

c) Každá posloupnost, která má nevlastní limitu $+\infty$ nebo $-\infty$ je monotónní.
Věta neplatí. Například posloupnost $\left(n+2[-1]^n\right)_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu plus nekonečno, ale není monotónní.

Př. 6: Sepiš přehled všech situací, které mohou nastat ohledně limit posloupností. Uveď u každé situace příklad posloupnosti.

Mohou nastat celkem čtyři situace:

- Posloupnost je konvergentní, její limitou je reálné číslo a: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (posloupnost má vlastní limitu a), například posloupnost $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.
- Posloupnost je divergentní a má nevlastní limitu $+\infty$: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (posloupnost má nevlastní limitu $+\infty$), například posloupnost $\left(n^2\right)_{n=1}^{\infty}$, $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$.
- Posloupnost je divergentní a má nevlastní limitu $-\infty$: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (posloupnost má nevlastní limitu $-\infty$), například posloupnost $\left(-2^n\right)_{n=1}^{\infty}$, $\lim_{n\to\infty} -2^n = -\infty$.
- Posloupnost je divergentní a nemá nevlastní limitu ani $+\infty$ ani $-\infty$, například posloupnost $\left([-1]^n\right)_{n=1}^{\infty}$.

Př. 7: Pro které hodnoty a_1 a d je aritmetická posloupnost:
a) konvergentní, b) divergentní s nevlastní limitou $+\infty$,
c) divergentní s nevlastní limitou $-\infty$, d) divergentní bez nevlastní limity?

Aritmetická posloupnost: neustále přičítáme diferenci $\Rightarrow$ nezáleží na hodnotě prvního členu, o limitách rozhoduje diference.

a) konvergentní
Aritmetická posloupnost je konvergentní, právě když $d=0$. Potom platí $\lim_{n\to\infty} a_n = a_1$.

b) divergentní s nevlastní limitou $+\infty$
Aritmetická posloupnost je divergentní s nevlastní limitou $+\infty$, právě když $d>0$.

c) divergentní s nevlastní limitou $-\infty$
Aritmetická posloupnost je divergentní s nevlastní limitou $-\infty$, právě když $d<0$.

d) divergentní bez nevlastní limity
Aritmetická posloupnost nemůže být divergentní bez nevlastní limity.

Př. 8: Pro které hodnoty a_1 a q je geometrická posloupnost:
a) konvergentní, b) divergentní s nevlastní limitou $+\infty$,
c) divergentní s nevlastní limitou $-\infty$, d) divergentní bez nevlastní limity?

Geometrická posloupnost: neustále násobíme kvocientem $\Rightarrow$ záleží na hodnotě prvního členu i kvocientu (jako u monotónnosti a omezenosti).

a) konvergentní
Geometrická posloupnost je konvergentní, právě když $|q|<1$ (potom platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$), nebo když $q=1$ ((potom platí $\lim_{n\to\infty} a_n = a_1$), nebo když $a_1 = 0$ (potom platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$).
b) divergentní s nevlastní limitou $+\infty$
Geometrická posloupnost je divergentní s nevlastní limitou $+\infty$, právě když $q>1$ s $a_1>0$.
c) divergentní s nevlastní limitou $-\infty$
Geometrická posloupnost je divergentní s nevlastní limitou $-\infty$, právě když $q>1$ s $a_1<0$.
d) divergentní bez nevlastní limity
Geometrická posloupnost je divergentní bez nevlastní limity, právě když $q\le -1$ a $a_1 \neq 0$.

Shrnutí: Posloupnost má nevlastní limitu plus nekonečno, když překoná libovolně velké číslo.